

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκ 1 Στο μοναδικό αυτόματο μηχανήμα πώλησης εισιτηρίων σιδηροδρομικού σταθμού οι πελάτες έρχονται σύμφωνα με την κατανομή Poisson με μέση τιμή 20 πελάτες την ώρα και περιμένουν σε μια ουρά για να αγοράσουν εισιτήρια.

Έχει παρατηρηθεί ότι ο χρόνος που απασχολεί κάθε πελάτης το μηχανήμα για την αγορά εισιτηρίου του ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\mu$ .

Για την καλή λειτουργία και ξεκαύραση του μηχανήματος οι υπεύθυνοι του σταθμού σκέφτηκαν να μην επιτρέψουν (σε στατική ισορρ) τον μέσο χρόνο συνεχούς χρήσης του μηχανήματος να υπερβαίνει την μια ώρα. Τι τιμές πρέπει να έχει η παράμετρος  $\mu$  ώστε να επιτευχθεί ο στόχος;

• Αποδείξτε κάθε τύπο που θα χρησιμοποιήσετε.

Απάντηση

Σύστημα M/M/1/∞ (Τύπος 1 εξυπηρετητή  
αφίξεις Poisson  
χρόνος Εξυπ εκθετική)

Poisson( $\lambda$ ) όπου  
 $\lambda = 20$

χρόνος Εξυπ  $\sim \text{Exp}(\mu)$

Σ.Ι (στατική ισορροπία) : Μέσος χρόνος συνεχούς χρήσης  $\leq 1$  ώρα.

||  
Μέσος χρόνος συνεχούς απασχόλησης

Χρόνος συνεχούς απασχόλ.:  $(\mu - \lambda) e^{-(\mu - \lambda)w} = \mu(1 - \rho) e^{-\mu(1 - \rho)w}$   
 $\text{Exp}(\mu(1 - \rho))$

$$\frac{1}{\mu(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda} \leq 1 \quad \text{άρα} \quad \boxed{1 \leq \mu - \lambda} \Rightarrow 1 \leq \mu - 20 \Rightarrow \boxed{\mu \geq 21}$$

Ασκ 3 Σ' ένα συνεργείο ελέγχου, χωρίς ραντεβού έρχονται

2 αυτοκίνητα την ώρα και ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι

3 πελάτες (αυτοκίνητα) την ώρα.

Η εταιρεία αγόρασε ένα νέο μοντέλο ηλεκτρονικού ελέγχου

που είχε ως αποτέλεσμα ο χρόνος ελέγχου για κάθε αυτοκίνητο μειώθηκε σε 15 λεπτά ανά αυτοκίνητο.

Μπορείτε να δείτε τις διαφορές στα χαρακτηριστικά του συστήματος (στατική ισορροπία)

Παρατήρηση 3 πελάτες την ώρα  $\equiv$  20 λεπτά ανά αυτοκίνητο.

Απαίτηση

2 αυτοκ την ώρα

Εξυπ. 3 πελάτες την ώρα  $\equiv$  20 λεπτά ανά αυτοκ.

από 20 λεπτά  $\xrightarrow{\text{πηξε}}$  15 λεπτά

Σύστημα M/M/1/oo

ΠΡΙΝ

$$\lambda = 2 \quad (\text{ώρα})$$

$$\mu = 3 \quad (\text{ώρα})$$

ΜΕΤΑ

$$\lambda = 2$$

$$\mu = \frac{60}{15} = 4$$

$$E_w q = E_w - \frac{1}{\mu}$$

ΠΡΙΝ

$$E_w q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{2}{3}$$

$$L_q = 4/3$$

ΜΕΤΑ

$$E_w q = \frac{1}{4}$$

$$L_q = \frac{1}{2}$$

$E_k q(\mu)$  έχει μέση τιμή  $\frac{1}{\mu}$

$$\frac{20}{60} = \frac{1}{3} = \frac{1}{\mu}$$

Η διαφοροποίηση παρατηρείται στο  $\mu$ .

Μέσος χρόνος παραμονής

$$E_w \frac{1}{\mu - \lambda} = 1 \text{ ώρα}$$

Μέσος αριθμός  $L = \rho / (1 - \rho) = 2$

$$E_w = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{2}$$

$$L = 1$$

Ασκ 2 Σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν μοναδικό υπάλληλο

και απεριόριστο χώρο αναμονής, πελάτες καταφθάνουν με κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda$ . Ο υπάλληλος τους εξυπηρετεί σύμφωνα με την ευθετική κατανομή, όμως με μια ιδιομορφία εξυπηρετεί με 2-πλάσια ταχύτητα όταν ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι μεγαλύτερος από  $k$ .

Να βρεθούν οι πιθανότητες σε κατάσταση στατικής ισορροπίας

Απάντηση

Σύστημα  $M/M/1/\infty$  (ειδική περίπτωση γεννήσεων-θανάτων)  
 1 υπάλληλος  
 απεριόρ  $\infty$   
 αφίξεις Poisson ( $\lambda$ )  
 χρόν εξυπ. Ευθ

Εξυπηρετεί με διπλάσια ταχύτητα όταν αριθμός πελατών  $> k$ .

$$P_n = ?$$

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & , n \leq k \\ 2\mu & , n > k \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Γενική απόδειξη του } P_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0$$

$$\begin{cases} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0 & n \leq k \\ \frac{\lambda_0 \dots \lambda_k \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_n} P_0 & n > k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\lambda \dots \lambda}{\mu \dots \mu} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 & n \leq k \\ \frac{\lambda \dots \lambda}{\mu \dots \mu \quad 2\mu \dots 2\mu} P_0 = \frac{\lambda^n}{(\mu)^k (2\mu)^{n-k}} P_0 & n > k \end{cases}$$

$$= \frac{\lambda^n}{2^{n-k} \mu^n} P_0$$

**Προσοχή!**

πχ  
 Έστω  $k=7$   
 9 φάρες  
 $P_9 = \frac{\lambda \dots \lambda}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_7 \mu_8 \mu_9} P_0$   
 $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_7 \mu_8 \mu_9$   
 $\mu \mu \dots \mu \quad 2\mu \quad 2\mu$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 \left[ \sum_{n=0}^k \frac{\lambda^n}{\mu^n} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{2^{n-k} \mu^n} \right] = 1$$

Ασκ 2

$$p = \frac{\lambda}{\mu} \quad p_0 \left[ \sum_{n=0}^k p^n + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{2^{n-k} \mu^n} \right] = 1$$

Θέτω  $n-k=j$

$$p_0 \left[ \sum_{n=0}^k p^n + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{j+k}}{2^j \mu^{j+k}} \right] = 1$$

για  $p=1$  κάνει  $k+1$

$$p_0 \left[ \underbrace{\sum_{n=0}^k p^n}_{\text{γεωμετρική σειρά}} + \frac{\lambda^k}{\mu^k} \sum_{j=1}^{+\infty} \left( \frac{\lambda}{2\mu} \right)^j \right] = 1$$

$$\frac{1-p^{k+1}}{1-p} \quad \text{όταν } p \neq 1$$

Πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις.

Περίπτωση 1  $p=1$  τότε  $p_0 \left[ (k+1) + 1^k \sum_{j=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^j \right] = 1$

$$p_0 \left[ (k+1) + \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^j - \left( \frac{1}{2} \right)^0 \right] = 1$$

$$p_0 \left[ (k+1) + \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^{-1} - 1 \right] = 1$$

$$p_0 [k+1 + 2 - 1] = 1$$

$$\Rightarrow p_0 = (k+2)^{-1} \quad \text{όταν } p=1$$

$$\downarrow \quad \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{1}{2} p = \frac{1}{2}$$

Περίπτωση 2  $\rho \neq 1$  τότε  $P_0 \left[ \sum_{n=0}^k \rho^n + \frac{\lambda^k}{\mu^k} \sum_{j=1}^{+\infty} \left( \frac{\lambda}{2\mu} \right)^j \right] = 1$

$$P_0 \left[ \frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho} + \rho^k \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{+\infty} \left( \frac{\rho}{2} \right)^j}_{= \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \frac{\rho}{2} \right)^j - \left( \frac{\rho}{2} \right)^0} \right] = 1$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \frac{\rho}{2} \right)^j - 1$$

$$\stackrel{\frac{\rho}{2} < 1}{=} (1 - (\frac{\rho}{2}))^{-1} - 1 \quad (\text{για } \frac{\rho}{2} > 1 \text{ δεν έχω Σ.Ι})$$

$$= \frac{\rho}{2-\rho}$$

Άρα

$$P_0 \left[ \frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho} + \rho^k \frac{\rho}{2-\rho} \right] = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = \left[ \frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho} + \rho^k \frac{\rho}{2-\rho} \right]^{-1}$$

Ασκ 4 Σ'ένα βενζιναΐδιο ο χρόνος εξυπηρέτησης σε ώρες (της μοναδικής αντλίας) είναι εκθετικός με παράμετρο  $\mu$ , ενώ καταφθάνουν 5 αυτοκίνητα ανά ώρα.

Το κόστος αναμονής, στο βενζιναΐδιο είναι  $k_1$  χρηματικές μονάδες ανά αυτοκίνητο ανά ώρα, ενώ το κόστος του αυτοκινήτου που εξυπηρετείται είναι  $\mu k_2$  χρηματικές μονάδες/ώρα.

Να προσδιοριστεί ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης που ελαχιστοποιεί το συνολικό ωριαίο κόστος

### Απάντηση

ΕΚΘ( $\mu$ )      Κόστος αναμονής =  $k_1$  χ.μ. ανά αυτοκ. ανά ώρα  
(στο σύστημα)

Poisson ( $\lambda = 5$ )      Κόστος εξυπηρ =  $\mu \cdot k_2$

$$\text{Συνολικό ωριαίο κόστος} = k_1 * \underset{\substack{\uparrow \\ \text{μέσος αριθμός} \\ \text{πελατών}}}{L} + \mu \cdot k_2$$

$$\text{όπου } L = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \swarrow \text{Ανοδ} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα Συνολικό ωριαίο κόστος} &= k_1 \cdot \frac{\rho}{1-\rho} + \mu k_2 \\ &\stackrel{\rho < 1}{=} k_1 \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} + \mu k_2 \\ &\quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{(A)}} \end{aligned}$$

Θέλω να ελαχιστοποιήσω το (A)

$$\frac{\partial A}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \text{2}^\circ \text{βαθμια εξίσωση} \quad k_2 \mu^2 - 2k_2 \lambda \mu + k_2 \lambda^2 - \lambda k_1 = 0.$$

$$\mu_{1,2} = \frac{2k_2 \lambda \pm \sqrt{4k_1 k_2 \lambda}}{2k_2} \quad \begin{cases} \frac{2k_2 \lambda + \sqrt{4k_1 k_2 \lambda}}{2k_2} \text{ δέκτη} \\ \frac{2k_2 \lambda - \sqrt{4k_1 k_2 \lambda}}{2k_2} \text{ απορρ} \end{cases}$$

$$\text{Θέλω ελαχίστου άρα κρατώ } \mu = \frac{2k_2 \lambda + \sqrt{4k_1 k_2 \lambda}}{2k_2}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1 \Rightarrow \lambda < \mu$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \mu^2} > 0 \quad \text{άρα } \boxed{\mu = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda k_1}{k_2}}}$$

Ασκ 5 Σ'ένα κατάστημα λανικής εργάζεται ένας υπάλληλος.

Ο αριθμός των πελατών ακολουθεί Poisson κατανομή με μέσο ρυθμό αφίξεων 24 ανά ώρα.

Οι πελάτες εξυπηρετούνται με την πειθαρχία FCFS και δεν αποχωρεί κανείς. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη ακολουθεί εκθετική με μέση τιμή 2 λεπτά.

α) Ποιος ο μέσος αριθμός πελατών;

β) Πόσος είναι ο αναμενόμενος χρόνος που θα περιμένει ένας πελάτης;

γ) Ποιο ποσοστό του χρόνου είναι αδρανής ο υπάλληλος;

δ) Ποια η πιθανότητα ένας πελάτης να περιμένει περισσότερο από 10 λεπτά; (Δεν έχει φύγει ο προηγούμενος)

$$P(W < W_{n+1} < W_n + dW) = \mu e^{-\mu W} (1-p) \int_0^\infty \dots = (1-p) \mu e^{-\mu(1-p)W}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{60 \text{ λεπτά}}{10 \text{ λεπτά}} = 6 \quad W \in \mathcal{D}(6) \\ P(W > 1/6) = 1 - P(W < 1/6) = 1 - \int_0^{1/6} 6 \cdot e^{-6t} dt = \dots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 24 \\ \mu = \frac{60}{2} = 30 \end{array} \right\} \rho = \frac{24}{30} < 1 \quad \text{Σ.Ι}$$

α) μέσος αριθμός πελατών

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \dots = 4 \quad \text{απόδειξη}$$

βρίσκω Pn αρχικά

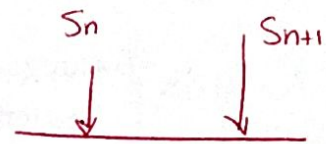
β)  $E(W) = \frac{1}{\mu(1-p)} = \frac{\lambda}{L} \quad \text{σχέσεις Little.}$

σημ  $\mu(1-p)e^{-\mu(1-p)W}, W \geq 0 \quad E_{\mathcal{D}(\mu(1-p))}$

γ)  $P_0 = (1-p)P^0 = (1-p) \Rightarrow P_0 = \frac{1}{5}$

## Η διαδικασία αναχωρήσεων στο M/M/1/∞

Οι αναχωρήσεις αποτελούν τη διαδικασία αφίξεων σ' ένα άλλο σύστημα εξυπηρέτησης



Έστω  $X$  ή  $\tau_k$  (συνεχής) που παριστάνει το χρόνο μεταξύ δυο διαδοχικών αναχωρήσεων πελατών

ΣΚΕΨΗ → Έστω όταν αναχωρεί κάποιος πελάτης αφήνει στο σύστημα κάποιον πελάτη (αίρα πριν αναχωρήσει υπάρχουν 2 ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα)

Τότε ο χρόνος μεταξύ των δυο διαδοχικών αναχωρήσεων είναι:  
Χρόνος εξυπηρέτησης που ακολουθεί  $Exp(\mu)$

Η διαφοροποίηση όμως προκύπτει όταν αναχωρεί κάποιος πελάτης και δεν αφήνει πελάτη πίσω του

(δηλ. όταν πριν την αναχώρησή του, υπάρχει ένας πελάτης)

Έστω  $h(x)$  η σ.π.π της  $\tau_k$   $X$

$$\text{Τότε } h(x) dx = P[x < X \leq x + dx]$$

$$= P\left[x < X \leq x + dx / \begin{array}{l} \text{υπάρχουν 2 ή} \\ \text{περισσότεροι πελάτες} \end{array}\right] \cdot P\left[\begin{array}{l} \text{υπάρχουν 2 ή} \\ \text{περισσότεροι} \\ \text{πελάτες} \end{array}\right] \\ + P\left[x < X \leq x + dx / \begin{array}{l} \text{υπάρχει} \\ \text{1 πελάτης} \end{array}\right] \cdot P\left[\begin{array}{l} \text{υπάρχει} \\ \text{1 πελάτης} \end{array}\right]$$

## Μελέτη των δύο όρων

$$P\left[x < X \leq x+dx \mid \begin{array}{l} \text{υπάρχουν 2 ή} \\ \text{περισσότεροι πελάτες} \end{array}\right] \cdot P\left[\begin{array}{l} \text{υπάρχουν 2 ή} \\ \text{περισσότεροι πελάτες} \end{array}\right] =$$

$\uparrow$   
 χρόνος μεταξύ  
 δύο αναχωρήσεων

$$= \mu e^{-\mu x} dx \cdot \left[ \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} P_k}{\sum_{k=1}^{+\infty} P_k} \right] \text{ΠΡΟΣΟΧΗ}$$

Γιατί?  $\rightarrow$   ~~$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$~~

Έχουμε αποκλείσει την περίπτωση το σύστημα να είναι άδειο.

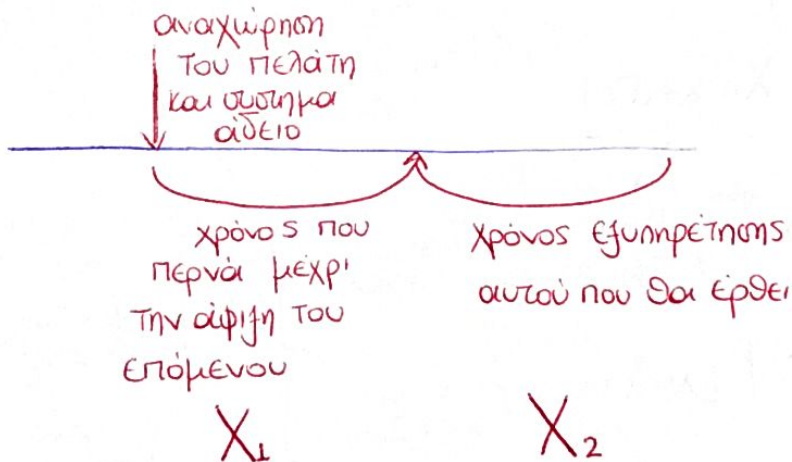
Επομένως για να αθροίσουν οι πιθανότητες στη μονάδα προχωρήσαμε σε κανονικοποίηση, έτσι ώστε να αθροίσουν στη μονάδα.

Στον 2<sup>ο</sup> όρο του αθροίσματος

$$P\left[\text{να υπάρχει 1 πελάτης}\right] = \frac{P_1}{\sum_{k=1}^{+\infty} P_k}$$

Προσδιορισμός της  $P[x < X \leq x+dx \mid \text{υπάρχει 1 πελάτης}]$

•  $X$  χρόνος μεταξύ δύο αναχωρήσεων όταν υπάρχει 1 πελάτης.



Οπότε  $X \equiv X_1 + X_2$  όπου  $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$   
 $X_2 \sim \text{Exp}(\mu)$

Μέθοδος προσδιορισμού της κατανομής του  $X_1 + X_2$ .

(βλέπω θεωρία Πιθαν/των & Στατιστικής)

χωρίς να αναστατείται απομνημόνευση σχέσης.

$$\begin{cases} U = X_1 + X_2 \\ V = X_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = V \\ X_2 = U - V \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_{u,v}(u,v) = f_{x_1,x_2}(v, u-v) \quad |J| \Rightarrow$$

$$f_{u,v}(u,v) = f_{x_1}(v) f_{x_2}(u-v) \Rightarrow$$

$$f_{u,v}(u,v) = \lambda e^{-\lambda v} \mu e^{-\mu(u-v)}$$

$\text{όπου } 0 < v < +\infty, \quad 0 < u-v < +\infty$

Tote  $f_u(u) = \int_{v=0}^u f_{u,v}(u,v) dv \Rightarrow$

$$f(u) = \int_0^u \lambda e^{-\lambda v} \mu e^{-\mu(u-v)} dv \Rightarrow$$

$$f_u(u) = \lambda \mu e^{-\mu u} \int_0^u e^{-(\lambda-\mu)v} dv \Rightarrow$$

$$f_u(u) = \lambda \mu e^{-\mu u} - \frac{1}{\lambda - \mu} e^{-(\lambda - \mu)u} \Big|_0^u \Rightarrow$$

$$f_u(u) = \frac{\lambda \mu e^{-\mu u}}{\lambda - \mu} [1 - e^{-(\lambda - \mu)u}] \Rightarrow$$

$$f_u(u) = \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu} e^{-\mu u} [1 - e^{-(\lambda - \mu)u}] \quad u > 0$$

Επομένως

$$h(x) = \mu e^{-\mu x} \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} p_k}{\sum_{k=1}^{+\infty} p_k} + \frac{\lambda \mu}{\lambda - \mu} e^{-\mu x} [1 - e^{-(\lambda - \mu)x}] \frac{p_1}{\sum_{k=1}^{+\infty} p_k}$$

$$\text{όμως } p_n = (1-p)p^n$$

$$\text{Άρα } \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1 - p_0 = 1 - (1-p) = p$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} p_k = 1 - p_0 - p_1 = 1 - (1-p) - (1-p)p = 1 - 1 + p - p + p^2 = p^2$$

$$\text{Τέλος } p_1 = (1-p)p = p - p^2$$

Συνεπώς προκύπτει:

$$h(x) = \mu e^{-\mu x} \frac{p^2}{p} + \frac{\lambda \mu}{\lambda - \mu} [e^{-\mu x} - e^{-\lambda x}] \frac{p - p^2}{p}$$

$$= \mu p e^{-\mu x} + (1-p) \frac{\lambda \mu}{\lambda - \mu} [e^{-\mu x} - e^{-\lambda x}]$$

$$= \mu \cdot \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu x} + \frac{(1 - \frac{\lambda}{\mu}) \lambda \mu}{\lambda - \mu} [e^{-\mu x} - e^{-\lambda x}]$$

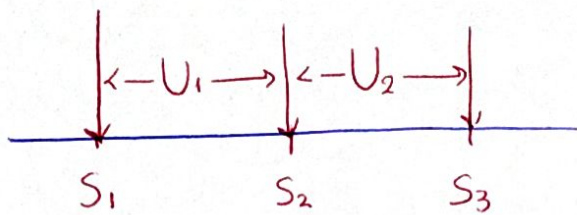
$$= \lambda e^{-\mu x} + \frac{\mu - \lambda}{\mu} \frac{\lambda \mu}{\lambda - \mu} [e^{-\mu x} - e^{-\lambda x}]$$

$$= \lambda e^{-\mu x} - \lambda [e^{-\mu x} - e^{-\lambda x}]$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Οι αναχωρήσεις πελατών έχουν ίδια κατανομή με αφίξεις !!!

Παρατήρηση Έστω  $S_1, S_2, S_3$  οι χρονικές συχνότητες τριών διαδοχικών αναχωρήσεων πελατών σε κατάσταση στατικής ισορροπίας.



$$U_1 = S_2 - S_1 \quad \text{όπου} \quad U_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$\lambda$ : παράμετρος της διαδικασίας αφίξεων.

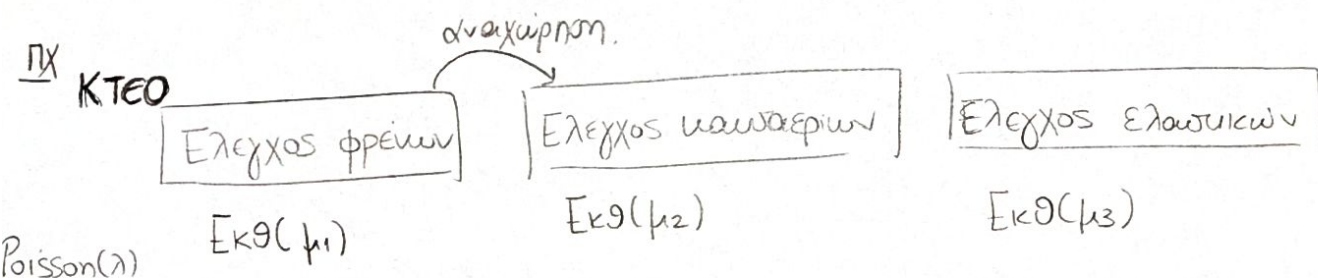
$$U_2 = S_3 - S_2 \quad U_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι  $U_1, U_2$  ανεξίτητες

Το παραπάνω είναι σημαντικό για τη μελέτη συστημάτων συνδεδεμένων στη σειρά.

$$M/M/1/\infty \xrightarrow{\mu_1} \bullet / M/1/\infty \xrightarrow{\mu_2} \text{Κ.Ο.Κ}$$

$$P[f_1(t_1)=n_1, \dots, f_n(t_n)=n_n] = P[f_1(t_1)=n_1] \dots P[f_n(t_n)=n_n]$$



7 πελάτες  
μόνο του  
 $P_1 = (1-\rho_1)\rho_1^7$

όπου  $\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}$

5 πελάτες  
 $P_2 = (1-\rho_2)\rho_2^5$   
όπου  $\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}$

3 πελάτες  
 $P_3 = (1-\rho_3)\rho_3^3$   
όπου  $\rho_3 = \frac{\lambda}{\mu_3}$